SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Andrea Bonfiglioli

UN TEOREMA DI LIOUVILLE NON LINEARE SUI SEMISPAZI DEI GRUPPI DI PASSO DUE

25 febbraio 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

Sunto. – Discutiamo un risultato di non esistenza per un problema di Dirichlet semilineare sub-ellittico con crescita critica sui semispazi di gruppi stratificati di passo due.

English summary – We discuss a non-existence result for a semilinear sub-elliptic Dirichlet problem with critical growth on half-spaces of stratified groups of step two.

Un teorema di Liouville non lineare sui semispazi dei gruppi di passo due

ANDREA BONFIGLIOLI

(I risultati presentati in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con il dott. F. Uguzzoni, si vedano [3, 4].)

Lo scopo di questo seminario è di presentare alcuni teoremi non lineari di tipo Liouville sui gruppi stratificati di passo due e in particolare sui gruppi di tipo Heisenberg (si veda il Teorema 1 a seguire). Lo studio di risultati non lineari di non esistenza nel contesto ellittico-degenere ha incontrato un crescente interesse negli ultimi decenni. Infatti, questo tipo di risultati gioca un ruolo cruciale nell'applicare tecniche di blow-up per ottenere risultati di esistenza per equazioni sub-ellittiche non lineari. Particolarmente rilevante è lo studio di equazioni critiche semilineari sui gruppi stratificati associati al problema di Yamabe e al problema della curvatura scalare di Webster sulle varietà CR (si veda e.g., [9]).

Una gran parte della relativa letteratura è dedicata al gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^k$, il più semplice esempio di gruppo stratificato non abeliano. Ad esempio, negli articoli [1, 2], vengono trattate equazioni semilineari sotto-critiche su $\mathbb{H}^k$: stime a priori e risultati di esistenza sono derivati attraverso i teoremi di non-esistenza di tipo "Gidas&Spruck". Un diverso approccio, di natura *variazionale*, viene seguito in [11, 14, 5]. In [5] l'esistenza di soluzioni è ottenuta usando i risultati di non esistenza in [11, 14] sui semispazi di $\mathbb{H}^k$ ed usando il principio di concentrazione&compattezza di P. L. Lions.

Il contesto variazionale sembra essere appropriato per ottenere risultati di esistenza anche nel più ampio caso di gruppi stratificati generali $\mathbb{G}$ (la cui importanza è messa in luce dal ben noto articolo di Rothschild&Stein [12]), una volta che siano stati provati opportuni teoremi di Liouville non lineari. Più precisamente, nell'applicare tecniche variazionali, si devono caratterizzare i livelli dell'energia delle soluzioni variazionali del seguente problema di Dirichlet semilineare con crescita critica

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{G}} u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}}, \\ u \in S_0^1(\Omega), \quad u > 0, \end{cases} \tag{1}$$

dove Ω è un semispazio di $\mathbb{G}$ o l'intero spazio. Qui, $\Delta_{\mathbb{G}}$ è un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$, Q denota la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$ e $S_0^1(\Omega)$ è l'appropriato spazio di Sobolev sub-

ellittico (le notazioni e le definizioni possono essere trovate di seguito).

L'analogo classico del problema (1), quando $\mathbb{G}$ è il gruppo euclideo $\mathbb{R}^N$ e $\Delta_{\mathbb{G}}$ è l'operatore di Laplace ordinario, è stato largamente studiato a partire dai primi anni ottanta (si veda e.g., la monografia [13] e i riferimenti bibliografici ivi contenuti). Tuttavia, in confronto al caso classico, i risultati di unicità e di non esistenza per (1) presentano nuove e significative difficoltà, anche nel caso "più semplice" del gruppo di Heisenberg $\mathbb{G} = \mathbb{H}^k$ [11, 14]. Queste difficoltà sono principalmente dovute alla mancanza di buone stime a priori per le derivate di Lie delle soluzioni nelle direzioni dei commutatori di ordine maggiore di uno. Il caso di gruppi stratificati generali presenta poi ulteriori complicazioni e, a nostra conoscenza, solo alcuni risultati parziali sono stati ottenuti finora. Questo è vero anche nel caso dei cosiddetti gruppi di tipo H, nonostante essi abbiano moltissime proprietà in comune coi gruppi di Heisenberg $\mathbb{H}^k$. I gruppi di tipo H sono stati introdotti da Kaplan [10] e costituiscono una notevole classe di gruppi stratificati di passo due ampiamente studiata tutt'oggi. Nello stesso articolo [10, eq. (17)], Kaplan esibì una soluzione esplicita di (1) (con simmetria cilindrica) quando $\mathbb{G}$ è un gruppo di tipo H e quando $\Omega = \mathbb{G}$. Inoltre, nel recente articolo [8], Garofalo&Vassilev hanno stabilito un risultato di unicità per soluzioni di (1) a simmetria cilindrica, quando $\mathbb{G}$ è un gruppo di tipo H *di tipo Iwasawa* e Ω è tutto $\mathbb{G}$. Inoltre, in [7] Garofalo&Vassilev trattano il problema di non esistenza sui semispazi. Le tecniche in [7] sono basate sull'uso di una trasformata di tipo Kelvin: questo obbliga gli autori a lavorare solo nel caso dei gruppi di tipo Iwasawa, una sottoclasse particolare dei gruppi di tipo H dove la trasformata di Kelvin possiede molte proprietà utili. D'altra parte, in [7] solo alcune classi di semispazi vengono trattate.

In questo seminario presentiamo il seguente risultato che esaurisce il problema per *tutti* i gruppi di tipo H e per *tutti* i semispazi. Questo risultato fornisce inoltre una risposta parziale per il problema dei gruppi generali di passo due.

Teorema 1. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di tipo H e sia Ω un qualunque semispazio di $\mathbb{G}$. Allora il problema di Dirichlet* (1) *non ha soluzioni. Inoltre, se $\mathbb{G}$ è un gruppo stratificato generale di passo due e Ω è un qualunque semispazio di $\mathbb{G}$ il cui bordo è parallelo al centro di $\mathbb{G}$, allora (anche in questo caso) il problema di Dirichlet* (1) *non ha soluzioni.*

Osserviamo esplicitamente che non ogni semispazio non caratteristico di un gruppo di passo due $\mathbb{G}$ ha la forma nel secondo asserto del Teorema 1, se $\mathbb{G}$ non è di tipo H.

Sebbene alcune delle nostre tecniche nell'affrontare il Teorema 1 siano ispirate alle idee contenute in [11, 14], sottolineiamo che il caso generale dei gruppi di tipo H presenta molte nuove difficoltà. Queste complicazioni sono principalmente dovute alla struttura del secondo strato della stratificazione dell'algebra di Lie di $\mathbb{G}$, che (quando il gruppo non è $\mathbb{H}^k$) ha sempre dimensione strettamente maggiore di uno. In particolare, la diversa geometria di $\mathbb{G}$ rende più arduo costruire funzioni barriera esplicite. Inoltre ci si deve imbattere a più livelli in una legge di gruppo più generale.

Di seguito tracciamo la linea della prova del teorema di cui sopra. Dapprima fissiamo

alcune notazioni. I gruppi stratificati N-dimensionali di passo *due* con m generatori sono caratterizzati dall'essere (canonicamente isomorfi a) $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ con la seguente legge di gruppo di Lie ($N = m + n$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}^n$)

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = \begin{pmatrix} x_j + \xi_j, & j = 1,\dots,m \\ t_j + \tau_j + \frac{1}{2}\langle x, U^{(j)}\xi\rangle, & j = 1,\dots,n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ove le $U^{(j)}$ sono matrici $m \times m$ antisimmetriche linearmente indipendenti. Il sub-Laplaciano canonico su $\mathbb{G}$ è l'operatore del secondo ordine ellittico-degenere $\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{j=1}^m X_j^2$, dove X_j è il campo invariante a sinistra che coincide con $\partial/\partial x_j$ nell'origine. L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di $\mathbb{G}$ ammette la stratificazione $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$, dove $\mathfrak{G}_1 = \mathrm{span}\{X_1,\dots,X_m\}$ e $\mathfrak{G}_2 = \mathrm{span}\{(\partial/\partial t_1),\dots,(\partial/\partial t_n)\}$. Denotiamo con $Q = m + 2n$ la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$ e con $\nabla_{\mathbb{G}} = (X_1,\dots,X_m)$ il gradiente sub-ellittico relativo al sub-Laplaciano $\Delta_{\mathbb{G}}$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ è un aperto con frontiera regolare, ricordiamo che l'insieme caratteristico di Ω è

$$\{z \in \partial\Omega \mid X_j(z) \in \mathrm{T}_z(\partial\Omega),\ j = 1,\dots,m\},$$

essendo $\mathrm{T}_z(\partial\Omega)$ lo spazio tangente a $\partial\Omega$ nel punto z. I gruppi stratificati hanno la seguente notevole proprietà: esiste una norma omogenea d su $\mathbb{G}$ tale che

$$\Gamma(z,\zeta) = d^{2-Q}(\zeta^{-1} \circ z), \qquad z, \zeta \in \mathbb{G}, \tag{3}$$

è la soluzione fondamentale per $\Delta_{\mathbb{G}}$. Nel seguito, denoteremo con $B_d(z,r)$ il d-disco con raggio $r > 0$ e centro $z \in \mathbb{G}$.

La definizione di gruppo di tipo H dovuta a Kaplan [10] è equivalente alla seguente: i gruppi di tipo H sono la sotto-classe dei gruppi stratificati di passo due $(\mathbb{G}, \circ)$ come in (2), con il requisito addizionale che le matrici $U^{(j)}$ siano *ortogonali* e soddisfino

$$U^{(r)}\,U^{(s)} + U^{(s)}\,U^{(r)} = 0, \qquad \text{per ogni } r,\, s \in \{1,\dots,n\} \text{ con } r \neq s.$$

La precedente caratterizzazione ci permette di scrivere una formula esplicita per il sub-Laplaciano $\Delta_{\mathbb{G}}$:

$$\Delta_{\mathbb{G}} = \textstyle\sum_{j=1}^m (\frac{\partial}{\partial x_j})^2 + \frac{1}{4}|x|^2 \sum_{s=1}^n (\frac{\partial}{\partial t_s})^2 + \sum_{s=1}^n \sum_{i,j=1}^m x_i U_{i,j}^{(s)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t_s}. \tag{4}$$

Per finire, fissiamo le notazioni per il problema di Dirichlet (1). Si pone $2^* = \frac{2Q}{Q-2}$. L'esponente $2^* - 1 = (Q+2)/(Q-2)$ è esponente critico per il problema di Dirichlet semilineare (1). Denotiamo con $S^1(\Omega)$ lo spazio di Sobolev delle funzioni $u \in L^{2^*}(\Omega)$ tali che $\nabla_{\mathbb{G}} u \in L^2(\Omega)$. La norma in $S^1(\Omega)$ è data da $\|u\|_{S^1(\Omega)} = \|u\|_{2^*} + \|\nabla_{\mathbb{G}} u\|_2$. Denotiamo con $S_0^1(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto a tale norma. Una soluzione del problema (1) è, per definizione, una funzione $u \in S_0^1(\Omega)$, $u > 0$, tale che $\int_\Omega \langle \nabla_{\mathbb{G}} u, \nabla_{\mathbb{G}} \varphi\rangle = \int_\Omega u^{2^*-1}\,\varphi$, per ogni $\varphi \in S_0^1(\Omega)$.

Nel seguito, $\mathbb{G}$ denoterà sempre un gruppo stratificato di passo due, Π un qualunque

semispazio di $\mathbb{G}$ e u denoterà sempre una fissata soluzione del problema al contorno (1) su $\Omega = \Pi$. Il cuore della prova del Teorema 1 consiste nel trovare opportune stime asintotiche per le derivate di u nel secondo strato, che permettano di applicare alcune identità generali di tipo Pohozaev. Identità di Pohozaev sono state provate negli articoli [6] per il gruppo di Heisenberg e in [7] per generali gruppi stratificati. Qui applichiamo [7, Theorem 3.1] per campi vettoriali del seguente tipo:

$$Z^{z_0}(z) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}((tz_0) \circ z), \quad \text{(per un fissato } z_0 \in \mathbb{G}). \tag{5}$$

È facile provare che $\operatorname{div}(Z^{z_0}) = 0$ e che Z^{z_0} commuta con $\nabla_{\mathbb{G}}$. Si ha dunque la seguente identità di tipo Pohozaev:

$$2\int_{\partial\Omega} \textstyle\sum_{j=1}^m X_j\varphi\,\langle X_j, \nu\rangle\, Z^{z_0}\varphi\,\mathrm{d}\sigma - \displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle Z^{z_0}, \nu\rangle\, |\nabla_{\mathbb{G}}\varphi|^2\,\mathrm{d}\sigma = 2\int_{\Omega} \Delta_{\mathbb{G}}\varphi\, Z^{z_0}\varphi. \tag{6}$$

Argomenti analoghi a quelli dati in [6, 11], permettono di provare il nostro Teorema di non esistenza 1, una volta che siano state stabilite opportune stime di u e delle sue Lie-derivate. Nel seguito tracciamo le linee della prova di queste stime.

Come primo step dobbiamo provare proprietà di sommabilità L^p per u, precisamente che $u \in L^p(\Omega)$ per ogni $p \in (2^*/2, \infty]$. Osserviamo che la prova della sommabilità L^p globale di u per i p più piccoli di 2^* richiede un adattamento significativo degli argomenti standard. Il passo seguente è di provare le stime asintotiche per u e per le sue Lie-derivate all'infinito, in termini della soluzione fondamentale Γ di $\Delta_{\mathbb{G}}$. Se u è prolungata a zero fuori da Π e $f = u^{2^*-1}$, si introduce la funzione $w(z) = \int_{\mathbb{G}} \Gamma(z,\zeta)\, f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ così che possiamo scrivere $u = w + v$, ove v è la parte $\Delta_{\mathbb{G}}$-*armonica* di u. Si ha $0 \le u \le w$ in Π. Al fine di stimare il decadimento di u, mostriamo che $w = \mathcal{O}(\Gamma)$, all'infinito. Questo può essere provato come conseguenza di [15, Theorem 1.1] unitamente alle citate proprietà L^p di u. Otteniamo così la stima asintotica di cui abbiamo bisogno $u \le M \min\{1, \Gamma\}$.

Ci occupiamo ora della stima delle Lie-derivate di $u = w + v$. Siccome $\mathbb{G}$ ha passo due, non è difficile trovare stime di w usando formule dirette di rappresentazione per le Lie-derivate della convoluzione che definisce w, fino al secondo ordine della stratificazione. Il cuore del problema è quindi quello di ottenere analoghe stime per le Lie-derivate di v nel secondo strato. A tal fine si devono distinguere due classi di semispazi Π, le cui differenti strutture geometriche richiedono approcci ad hoc:

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= \{(x,t) \in \mathbb{G} \mid \langle a, x\rangle > 0\} \quad \text{(per un fissato } a \in \mathbb{R}^m), \\ \Pi^{(2)} &= \{(x,t) \in \mathbb{G} \mid \langle b, t\rangle > 0\} \quad \text{(per un fissato } b \in \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{7}$$

Osserviamo esplicitamente che se $\mathbb{G}$ è un gruppo di tipo H, allora questi due tipi di semispazi caratterizzano completamente (a meno di traslazioni a sinistra nel gruppo) rispettivamente tutti i semispazi non-caratteristici e tutti i semispazi caratteristici. Al contrario, se $\mathbb{G}$ è un gruppo stratificato arbitrario di passo due, la classe dei semispazi

non-caratteristici in $\mathbb{G}$ contiene sicuramente tutti i $\Pi^{(1)}$, ma può anche essere più vasta.

Prima di tutto trattiamo il caso di un semispazio non-caratteristico $\Pi^{(1)}$. L'argomento principale è basato sulla rappresentazione delle derivate di v come limite di una successione di opportune medie integrali modellate sulla geometria di $\Pi^{(1)}$. Più precisamente, sia $Z \in \mathfrak{G}_2$. Siccome v è soluzione classica di $\Delta_{\mathbb{G}} v = 0$ in $\Pi^{(1)}$, $v = w$ in $\partial\Pi^{(1)}$, allora Zv è soluzione classica del problema di Dirichlet $\Delta_{\mathbb{G}}(Zv) = 0$ in $\Pi^{(1)}$, $Zv = Zw$ in $\partial\Pi^{(1)}$. Qui abbiamo usato i fatti per cui gli operatori $\Delta_{\mathbb{G}}$ e Z commutano e $\partial\Pi^{(1)}$ è invariante rispetto alle traslazioni euclidee lungo le coordinate x. Sia ora $r(x) > 0$ una funzione continua *che dipende solo da* x tale che $B_d((x,t), r(x)) \Subset \Pi^{(1)}$ per ogni $(x,t) \in \Pi^{(1)}$. Per ogni $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^{(1)})$ definiamo

$$Tg : \Pi^{(1)} \to \mathbb{R}, \quad (Tg)(x,t) = (M_{r(x)}g)(x,t),$$

ove M_r è definito da (qui $m_Q > 0$ è una opportuna costante e $K = |\nabla_{\mathbb{G}} d|^2$)

$$M_r(g)(z) = \frac{m_Q}{r^Q} \int_{B_d(z,r)} K(z^{-1} \circ \zeta)\, g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta.$$

T è un operatore lineare con le proprietà seguenti. *(i)* T è crescente e mappa $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^{(1)})$ in $C(\Pi^{(1)})$. *(ii)* Se $g \in C^2(\Pi^{(1)})$ e $\Delta_{\mathbb{G}} g = 0$ allora $Tg = g$. *(iii)* Se $g \in C^2(\Pi^{(1)})$ e $\Delta_{\mathbb{G}} g \leq 0$ allora $Tg \leq g$ e $(T^k g)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione non-crescente. *(iv)* T commuta con le Lie-derivate nel secondo strato. Per mezzo di queste proprietà di T, è possibile mostrare che $T^k u$ è una successione non-crescente che converge puntualmente a zero in $\Pi^{(1)}$ per $k \to \infty$. Di conseguenza, possiamo ottenere il risultato che ci occorre:

$$|Zv| = \mathcal{O}(\Gamma), \quad \text{all'infinito in } \Pi^{(1)}. \tag{8}$$

Infatti, dalle proprietà precedenti, si ha $Tv = v$ e quindi $T^k w = T^k v + T^k u = v + T^k u \searrow v$; inoltre $T^k(Zw) = Z(T^k w)$ da cui (per ogni funzione test Φ non negativa) $\int \Phi\, T^k(Zw) = -\int (Z\Phi)\, T^k w \xrightarrow{k \to \infty} \int \Phi\, Zv$. Dalle stime di w e la $\Delta_{\mathbb{G}}$-armonicità di Γ, segue anche $|T^k(Zw)| \leq T^k(c\Gamma) = c\Gamma$ in $\Pi^{(1)}$, da cui $|\int_{\Pi^{(1)}} \Phi\, Zv| \leq M \int_{\Pi^{(1)}} \Phi\, \Gamma$ che implica (8). Osserviamo in esplicito che tutto ciò che abbiamo discusso sinora è valido su un gruppo stratificato generale di passo due $\mathbb{G}$.

Ci manca quindi di investigare i semispazi $\Pi^{(2)}$ in (7). A tal fine, ci restringiamo al caso in cui $\mathbb{G}$ è di tipo H. Quindi i $\Pi^{(2)}$ esauriscono (a meno di traslazioni a sinistra) tutti i semispazi caratteristici. Qui è necessario utilizzare un argomento molto elaborato per ottenere le stime desiderate delle Lie-derivate nel secondo strato. Questo argomento è basato su una delicata costruzione di esplicite funzioni barriera (modellate sulla geometria di $\Pi^{(2)}$ e delle proprietà dei gruppi di tipo H) e si basa altresì sulla conoscenza esplicita di $\Delta_{\mathbb{G}}$ come in (4). Riassumiamo brevemente il nostro approccio. Prima troviamo una stima di u vicino alla frontiera di Π che permette di ottenere una stima della derivata normale Zu su $\partial\Pi$. Quindi, sfruttando il fatto che $\Delta_{\mathbb{G}}$ e Z commutano, possiamo estendere tale stima dentro Π. In tal modo otteniamo il comportamento

asintotico per Zu sia all'infinito sia vicino l'insieme caratteristico $\{|x| = \langle b, t\rangle = 0\}$ (Zu potrebbe non essere regolare fino al bordo). Non forniamo ulteriori dettagli. Osserviamo solo che la mancanza di compattezza dell'insieme caratteristico aggiunge notevoli complicazioni in tale costruzione, se confrontata col caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^k$.

I dettagli delle prove presentate in questo seminario si possono trovare in [3, 4].

Riferimenti bibliografici

[1] I. Birindelli, I. Capuzzo Dolcetta, A. Cutrì, *Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg group*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), 295–308.

[2] I. Birindelli, I. Capuzzo Dolcetta, A. Cutrì, *Indefinite semi-linear equations on the Heisenberg group: a priori bounds and existence*, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998), 1123–1157.

[3] A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni, *Nonlinear Liouville theorems for some critical problems on H-type groups*, J. Funct. Anal., to appear.

[4] A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni, *Some non-existence results for critical equations on step-two stratified groups*, preprint.

[5] G. Citti, F. Uguzzoni, *Critical semilinear equations on the Heisenberg group: the effect of the topology of the domain*, Nonlinear Anal. **46** (2001), 399–417.

[6] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, Indiana Univ. Math. J. **41** (1992), 71–98.

[7] N. Garofalo, D. Vassilev, *Regularity near the characteristic set in the nonlinear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups*, Math. Ann. **318** (2000), no. 3, 453–516.

[8] N. Garofalo, D. Vassilev, *Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe-type equations on groups of Heisenberg type* Duke Math. J. **106** (2001), no. 3, 411–448.

[9] D. Jerison, J.M. Lee, *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geom. **25** (1987), 167–197.

[10] A. Kaplan, *Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms* Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), no. 1, 147–153.

[11] E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Asymptotic behavior and non-existence theorems for semilinear Dirichlet problems involving critical exponent on unbounded domains of the Heisenberg group*, Boll. Un. Mat. Ital. (8) **1-B** (1998), 139–168.

[12] L.P. ROTHSCHILD, E.M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1976), 247–320

[13] M. STRUWE, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[14] F. UGUZZONI, *A non-existence theorem for a semilinear Dirichlet problem involving critical exponent on halfspaces of the Heisenberg group*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **6**, n.2 (1999), 191–206.

[15] F. UGUZZONI, *Asymptotic behavior of solutions of Schrödinger inequalities on unbounded domains of nilpotent Lie groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **102** (1999), 51–65.